INTERROGATION N°2 — CALCUL (SUJET A)

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Énoncer la première et la seconde inégalité triangulaire.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad |x+y| \leq |x|+|y| \qquad \text{et} \qquad ||x|-|y|| \leq |x-y|$$

2) Donner les formules de $\cos a \cos b$ et de $\sin a \sin b$.

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right) \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right) \end{aligned}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2-5x+4} \leq 2-x$.

L'équation a un sens lorsque $x^2-5x+4 \geq 0$, i.e. $(x-1)(x+4) \geq 0$, ou encore $x \in]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[$. (on souhaite passer au carré mais pour garder l'équivalence, il faut s'assurer que $2-x \geq 0$: on disjoint les cas).

- Si $x \geq 4$, alors $2-x < 0 \leq \sqrt{x^2-5x+4}$ donc x n'est pas solution.
- Si $x \leq 1$, alors

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2-5x+4} \leq 2-x \\ \iff & x^2-5x+4 \leq 4-4x+x^2 \\ \iff & -x \leq 0 \\ \iff & x \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = [0, 1]}$.

4) Résoudre $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & \sin x = -\frac{1}{2} \\ \iff & \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ \iff & x \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\ [2\pi] \\ \iff & x \in -\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } x \in \frac{7\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathcal{S} = \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)}$

Interrogation n°2 — Calcul (sujet B)

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Énoncer les deux caractérisations faisant intervenir la partie entière.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Alors

$$p = \lfloor x \rfloor \iff p \leq x < p+1$$
$$p = \lfloor x \rfloor \iff x-1 < p \leq x$$

2) Donner les formules de $\cos(a+b)$, de $\sin(a+b)$ et de $\tan(a+b)$.

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a\\ \tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}\end{aligned}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\left|x^2 - 4x + 4\right| \leq |x+3|$.

$$x+3 \geq 0 \iff x \geq -3$$
$$x^2 - 4x + 4 \geq 0 \iff (x-2)^2 \geq 0$$

or cette dernière assertion est toujours vraie. Donc on a $x^2 - 4x + 4 \geq 0$. Ainsi, il n'y a que deux cas à traiter :

- Si $x \leq -3$, alors l'inéquation devient

  $$x^2 - 4x + 4 \leq -x - 3 \iff x^2 - 3x + 7 \leq 0$$

  Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 9 - 28 < 0$: le polynôme est de signe constant, celui de son coefficient de plus haut degré. Ainsi, ce polynôme est strictement positif, si bien qu'il n'y a pas de x solution.

- Si $x \geq -3$, alors l'inéquation devient

  $$x^2 - 4x + 4 \leq x + 3 \iff x^2 - 5x + 1 \leq 0$$

  Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 25 - 4 = 21 > 0$: le polynôme admet deux racines réelles :

  $$x_1 = \frac{5-\sqrt{21}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

  Ainsi, ce polynômes est négatif sur $[x_1, x_2]$. Or, on a $x_2 > x_1 > 0$ et (par hypothèse) $x \geq -3$, donc les solutions de cette inéquation sont

  $$\mathcal{S} = \left[\frac{5-\sqrt{21}}{2}, \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right]$$

4) Résoudre $\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos x \geq -\frac{1}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \qquad -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

d'où

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$$